MEM6810 工程系统建模与仿真

案例 软件

第三讲: 一般随机变量与随机数

沈海辉

中美物流研究院
上海交通大学

shenhaihui.github.io/teaching/mem6810p
shenhaihui@sjtu.edu.cn

2025年春 (MEM非全日制)

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY | 董浩云智能制造与服务管理研究院 CY TUNG Institute of Intelligent Manufacturing and Service Management （中美物流研究院） (Sino-US Global Logistics Institute)

目录

1. 离散与连续随机变量
   - 基础定义
   - 期望和方差
   - 随机样本
   - 点估计和区间估计
2. 常用的分布
   - 泊松分布
   - 三角分布
   - 指数分布
   - 正态分布
   - 经验分布
3. 一般随机数的生成
   - 逆变换法
   - 接受–拒绝法
   - Box–Muller 法

- 对于任意的随机变量 X, 我们定义累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF) $F(x)$ 为

$$F(x) := \mathbb{P}(X \le x), \text{ 对于任意的 } x \in \mathbb{R}.$$

- 对于任意的随机变量 X, 我们定义累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF) $F(x)$ 为

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leq x), \text{ 对于任意的 } x \in \mathbb{R}.$$

- $F(x)$ 具有如下性质:
  - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
  - $F(x)$ 为 x 的非减函数;
  - $F(x)$ 为右连续, 即, 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\downarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

- 离散随机变量: 可能的取值是离散的.

- 离散随机变量: 可能的取值是离散的.
- 若 X 为离散随机变量, 我们定义概率质量函数 (probability mass function, pmf) $p(x)$ 为

$$p(x) := \mathbb{P}(X = x), \text{ 对于任意的 } x \in \mathbb{R}.$$

- 离散随机变量: 可能的取值是离散的.
- 若 X 为离散随机变量, 我们定义概率质量函数 (probability mass function, pmf) $p(x)$ 为

$$p(x) := \mathbb{P}(X = x), \text{ 对于任意的 } x \in \mathbb{R}.$$

- $p(x)$ 具有如下性质:
  - $p(x) \geq 0$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$;
  - $\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1$.

- 离散随机变量: 可能的取值是离散的.
- 若 X 为离散随机变量, 我们定义概率质量函数 (probability mass function, pmf) $p(x)$ 为

$$p(x) := \mathbb{P}(X = x), \text{ 对于任意的 } x \in \mathbb{R}.$$

- $p(x)$ 具有如下性质:
  - $p(x) \geq 0$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$;
  - $\sum_{x\in\mathbb{R}} p(x) = 1$.
- 易知, $F(x) = \sum_{y\in(-\infty, x]} p(y)$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$.

- 简单例子: 假设 X 是一个离散随机变量, 它的可能取值为 0, 1 和 2, 相应的概率为 0.5, 0.3 和 0.2.

- 简单例子: 假设 X 是一个离散随机变量, 它的可能取值为 0, 1 和 2, 相应的概率为 0.5, 0.3 和 0.2.
- X 的 pmf 和 CDF 如下:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 0, \\ 0.3, & x = 1, \\ 0.2, & x = 2, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \le x < 1, \\ 0.8, & 1 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x. \end{cases}$$

- 简单例子: 假设 X 是一个离散随机变量, 它的可能取值为 0, 1 和 2, 相应的概率为 0.5, 0.3 和 0.2.
- X 的 pmf 和 CDF 如下:

$$p(x)=\begin{cases}0.5, & x=0,\\ 0.3, & x=1,\\ 0.2, & x=2,\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.5, & 0\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<2,\\ 1, & 2\le x.\end{cases}$$

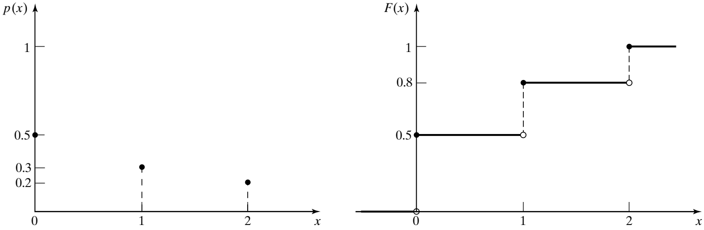


图: X 的 pmf 和 CDF 图像

- 连续随机变量: 可能的取值是连续的.

- 连续随机变量: 可能的取值是连续的.
- 若 X 为连续随机变量, 我们无法定义 pmf, 因为对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

- 连续随机变量: 可能的取值是连续的.
- 若 X 为连续随机变量, 我们无法定义 pmf, 因为对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- 我们定义概率密度函数 (probability density function, pdf) $f(x)$, 使其满足

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \text{ 对于任意的 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 且 } a < b.$$

- 连续随机变量: 可能的取值是连续的.
- 若 X 为连续随机变量, 我们无法定义 pmf, 因为对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- 我们定义概率密度函数 (probability density function, pdf) $f(x)$, 使其满足

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \text{ 对于任意的 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 且 } a < b.$$

- $f(x)$ 具有如下性质:
  - $f(x) \geq 0$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$;
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

- 连续随机变量: 可能的取值是连续的.
- 若 X 为连续随机变量, 我们无法定义 pmf, 因为对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- 我们定义概率密度函数 (probability density function, pdf) $f(x)$, 使其满足

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \text{ 对于任意的 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 且 } a < b.$$

- $f(x)$ 具有如下性质:
  - $f(x) \geq 0$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$;
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.
- 易知, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, 且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$.

- 简单例子: 假设连续随机变量 $X \sim \text{uniform}(a, b)$, 那么它的 pdf 和 CDF 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

- 简单例子: 假设连续随机变量 $X \sim \text{uniform}(a,b)$, 那么它的 pdf 和 CDF 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

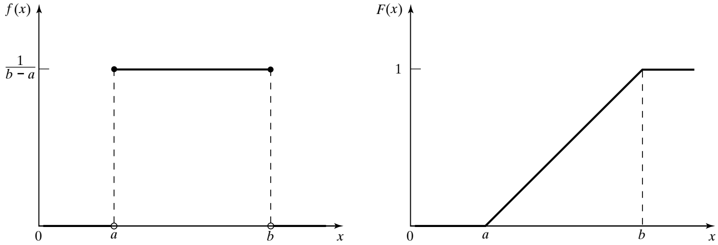


图: X 的 pdf 和 CDF 图像

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.
  - 离散: $\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)$, $\mathbb{E}[h(X)]=\sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)p(x)$;
  - 连续: $\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}[h(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$.

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.
  - 离散: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)$, $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)p(x)$;
  - 连续: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$.
- 随机变量 X 的方差, 记为 $\mathrm{Var}(X)$, 有时也简记为 σ^2:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.
  - 离散: $\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)$, $\mathbb{E}[h(X)]=\sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)p(x)$;
  - 连续: $\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}[h(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$.
- 随机变量 X 的方差, 记为 $\mathrm{Var}(X)$, 有时也简记为 σ^2:

$$\mathrm{Var}(X):=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2.$$

- 随机变量 X 与 Y 之间的**线性**关联:

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.
  - 离散: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)$, $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)p(x)$;
  - 连续: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$.
- 随机变量 X 的方差, 记为 $\mathrm{Var}(X)$, 有时也简记为 σ^2:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

- 随机变量 X 与 Y 之间的**线性**关联:
  - **协方差**: $\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.
  - 离散: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)$, $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)p(x)$;
  - 连续: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$.
- 随机变量 X 的方差, 记为 $\mathrm{Var}(X)$, 有时也简记为 σ^2:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

- 随机变量 X 与 Y 之间的**线性**关联:
  - **协方差**: $\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.
  - **相关系数**: $\rho(X,Y) := \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$.

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.
  - 离散: $\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)$, $\mathbb{E}[h(X)]=\sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)p(x)$;
  - 连续: $\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}[h(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$.
- 随机变量 X 的方差, 记为 $\mathrm{Var}(X)$, 有时也简记为 σ^2:

$$\mathrm{Var}(X):=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2.$$

- 随机变量 X 与 Y 之间的**线性**关联:
  - **协方差**:
    $\mathrm{Cov}(X,Y):=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.
  - **相关系数**: $\rho(X,Y):=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$.
  - $\rho(X,Y)=0 \iff \mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

- 随机变量 X 的期望 (又称为均值), 记为 $\mathbb{E}[X]$, 有时也简记为 μ.
  - 离散: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)$, $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)p(x)$;
  - 连续: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$.
- 随机变量 X 的方差, 记为 $\mathrm{Var}(X)$, 有时也简记为 σ^2:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

- 随机变量 X 与 Y 之间的**线性**关联:
  - **协方差**:
    $\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.
  - **相关系数**: $\rho(X,Y) := \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$.
  - $\rho(X,Y)=0 \iff \mathrm{Cov}(X,Y)=0$.
- 一般地, X 与 Y 统计上独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\rho(X,Y)=0$.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值，即，该分布下的一组随机数，则也称它们为 X 的一组样本.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到, 当样本点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被观测到之前, 它们也是随机的, 都服从 X 的分布, 并且相互独立.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到, 当样本点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被观测到之前, 它们也是随机的, 都服从 X 的分布, 并且相互独立.
- 记观测之前的样本点为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 则它们是 X 的一组 (尚未观测的) 随机样本.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到, 当样本点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被观测到之前, 它们也是随机的, 都服从 X 的分布, 并且相互独立.
- 记观测之前的样本点为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 则它们是 X 的一组 (尚未观测的) 随机样本.
  - 该随机样本的样本均值为 $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到, 当样本点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被观测到之前, 它们也是随机的, 都服从 X 的分布, 并且相互独立.
- 记观测之前的样本点为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 则它们是 X 的一组 (尚未观测的) 随机样本.
  - 该随机样本的样本均值为 $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - 该随机样本的样本方差为 $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值，即，该分布下的一组随机数，则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到，当样本点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被观测到之前，它们也是随机的，都服从 X 的分布，并且相互独立.
- 记观测之前的样本点为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，则它们是 X 的一组 (尚未观测的) 随机样本.
  - 该随机样本的样本均值为 $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - 该随机样本的样本方差为 $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.
- 可知，$\bar{X}$ 和 S^2 也是随机变量，服从一定的分布.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到, 当样本点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被观测到之前, 它们也是随机的, 都服从 X 的分布, 并且相互独立.
- 记观测之前的样本点为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 则它们是 X 的一组 (尚未观测的) 随机样本.
  - 该随机样本的样本均值为 $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - 该随机样本的样本方差为 $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.
- 可知, $\bar{X}$ 和 S^2 也是随机变量, 服从一定的分布.
  - $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathbb{E}[S^2] = \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

- 若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值, 即, 该分布下的一组随机数, 则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到, 当样本点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被观测到之前, 它们也是随机的, 都服从 X 的分布, 并且相互独立.
- 记观测之前的样本点为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 则它们是 X 的一组 (尚未观测的) 随机样本.
  - 该随机样本的样本均值为 $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - 该随机样本的样本方差为 $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.
- 可知, $\bar{X}$ 和 S^2 也是随机变量, 服从一定的分布.
  - $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathbb{E}[S^2] = \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.
  - $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

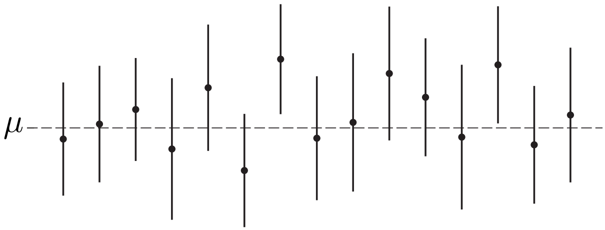
- 若 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为随机变量 X 的一组独立观测值，即，该分布下的一组随机数，则也称它们为 X 的一组样本.
  - 该样本的样本均值为 $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
  - 该样本的样本方差为 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.
- 注意到，当样本点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 被观测到之前，它们也是随机的，都服从 X 的分布，并且相互独立.
- 记观测之前的样本点为 $X_1, X_2, \dots, X_n$，则它们是 X 的一组 (尚未观测的) 随机样本.
  - 该随机样本的样本均值为 $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - 该随机样本的样本方差为 $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.
- 可知，$\bar{X}$ 和 S^2 也是随机变量，服从一定的分布.
  - $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathbb{E}[S^2] = \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.
  - $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.
  - 当 n 很大时，$\bar{X}$ 的随机性减弱，最终趋向常数 μ. (大数定律)

- 基于随机变量 X 的一组随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 如何估计 μ (即, $\mathbb{E}[X]$)?

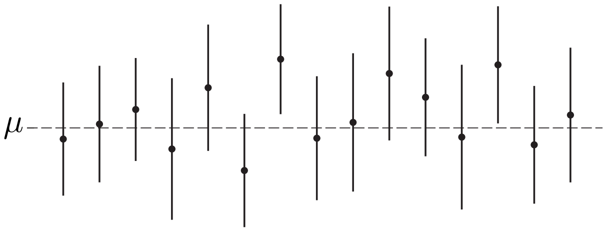
- 基于随机变量 X 的一组随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 如何估计 μ (即, $\mathbb{E}[X]$)?
- 点估计: 用 $\bar{X}$ 来估计 μ.

- 基于随机变量 X 的一组随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 如何估计 μ (即, $\mathbb{E}[X]$)?
- 点估计: 用 $\bar{X}$ 来估计 μ.
- 区间估计: 用 $[\bar{X} - H, \bar{X} + H]$ 来估计 μ, 确保 $100(1-\alpha)\%$ 置信水平 (confidence level).

- 基于随机变量 X 的一组随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 如何估计 μ (即, $\mathbb{E}[X]$)?
- 点估计: 用 $\bar{X}$ 来估计 μ.
- 区间估计: 用 $[\bar{X} - H, \bar{X} + H]$ 来估计 μ, 确保 $100(1-\alpha)\%$ 置信水平 (confidence level).



- 基于随机变量 X 的一组随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 如何估计 μ (即, $\mathbb{E}[X]$)?
- 点估计: 用 $\bar{X}$ 来估计 μ.
- 区间估计: 用 $[\bar{X} - H, \bar{X} + H]$ 来估计 μ, 确保 $100(1-\alpha)\%$ 置信水平 (confidence level).



- 试验一下! http://www.rossmanchance.com/applets/ConfSim.html

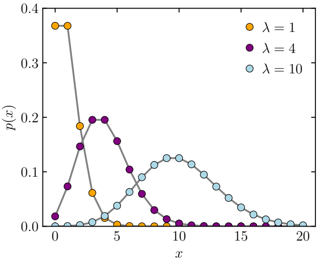
- 泊松 (Poisson) 分布，常被用来建模给定时间段内某事件发生的次数，如
  - 电话客服系统每分钟收到的呼叫次数;
  - 每小时到达公共汽车站的乘客数.

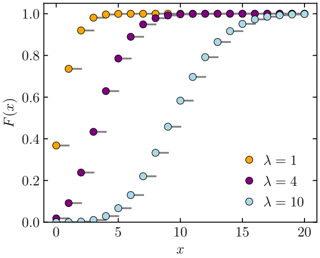
- 泊松 (Poisson) 分布，常被用来建模给定时间段内某事件发生的次数，如
  - 电话客服系统每分钟收到的呼叫次数;
  - 每小时到达公共汽车站的乘客数.
- 记 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$，如果

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

- 泊松 (Poisson) 分布，常被用来建模给定时间段内某事件发生的次数，如
  - 电话客服系统每分钟收到的呼叫次数；
  - 每小时到达公共汽车站的乘客数.
- 记 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$，如果

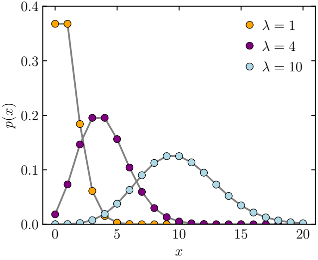
$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

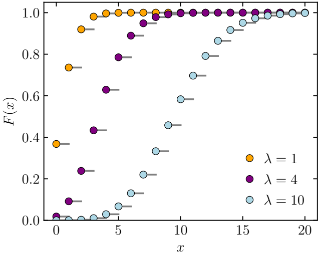




- 泊松 (Poisson) 分布，常被用来建模给定时间段内某事件发生的次数，如
  - 电话客服系统每分钟收到的呼叫次数；
  - 每小时到达公共汽车站的乘客数.
- 记 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$，如果

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

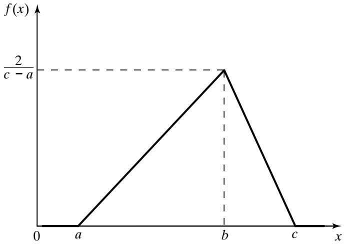


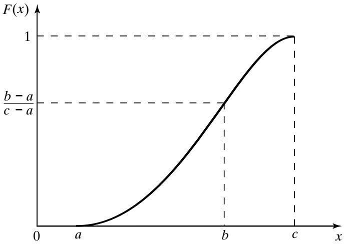


- $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$.

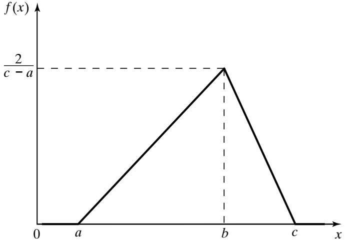
- 三角 (triangular) 分布, 是工程中常用的分布, 它用于当只知道某个随机变量的“最小值”、“最大值”和“ 最可能值”时.

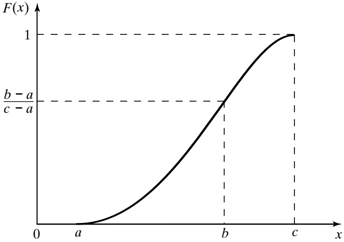
- 三角 (triangular) 分布，是工程中常用的分布，它用于当只知道某个随机变量的“最小值”、“最大值”和“ 最可能值”时.
- 若 X 服从三角分布，且最小值为 a，最大值为 c，最可能值为 b，记为 $\mathrm{triangular}(a,b,c)$，则它的 pdf 和 CDF 如下图所示.





- 三角 (triangular) 分布，是工程中常用的分布，它用于当只知道某个随机变量的“最小值”、“最大值”和“ 最可能值”时.
- 若 X 服从三角分布，且最小值为 a，最大值为 c，最可能值为 b，记为 $\text{triangular}(a, b, c)$，则它的 pdf 和 CDF 如下图所示.





- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b+c}{3}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$.

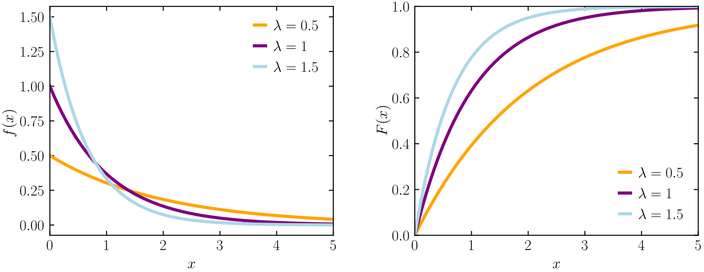
- 指数 (exponential) 分布, 常用于建模独立事件之间的时间间隔, 或者一个"**无记忆的**"过程的时间长度.

- 指数 (exponential) 分布，常用于建模独立事件之间的时间间隔，或者一个“**无记忆的**”过程的时间长度.
- 记 $X \sim \mathrm{exponential}(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$，如果

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty).$$

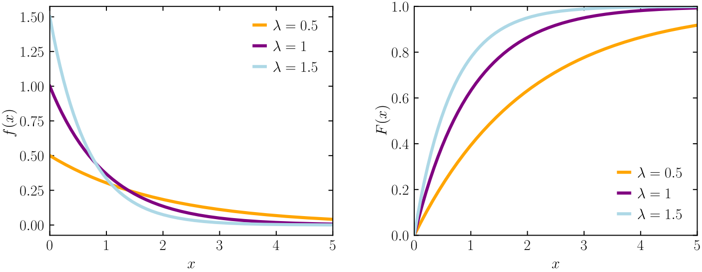
- 指数 (exponential) 分布，常用于建模独立事件之间的时间间隔，或者一个 “**无记忆的**” 过程的时间长度.
- 记 $X \sim \text{exponential}(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$，如果

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty).$$



- 指数 (exponential) 分布，常用于建模独立事件之间的时间间隔，或者一个“**无记忆的**”过程的时间长度.
- 记 $X \sim \text{exponential}(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$，如果

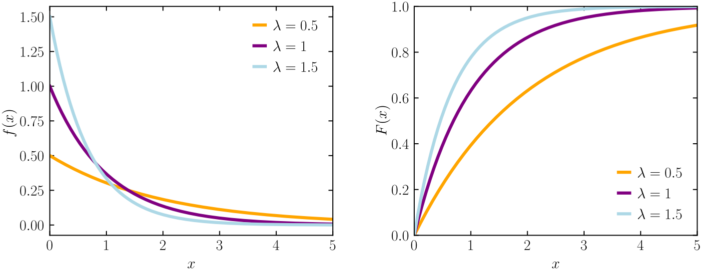
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty).$$



- $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$, $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

- 指数 (exponential) 分布, 常用于建模独立事件之间的时间间隔, 或者一个“无记忆的”过程的时间长度.
- 记 $X \sim \text{exponential}(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$, 如果

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty).$$



- $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$, $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$.
- 无记忆性: $\mathbb{P}(X > s | X > t) = \mathbb{P}(X > s - t)$.

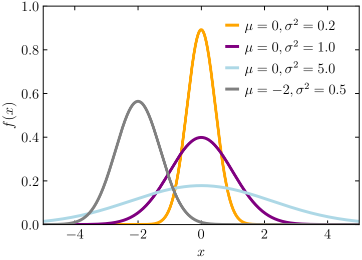
- 正态 (normal) 分布，也叫高斯分布，是统计中**最重要**的一个分布.

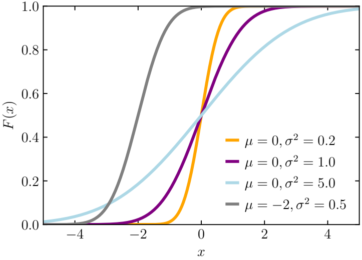
- 正态 (normal) 分布，也叫高斯分布，是统计中**最重要**的一个分布.
- 记 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，其中 $\sigma > 0$，如果

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 正态 (normal) 分布，也叫高斯分布，是统计中**最重要**的一个分布.
- 记 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，其中 $\sigma > 0$，如果

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

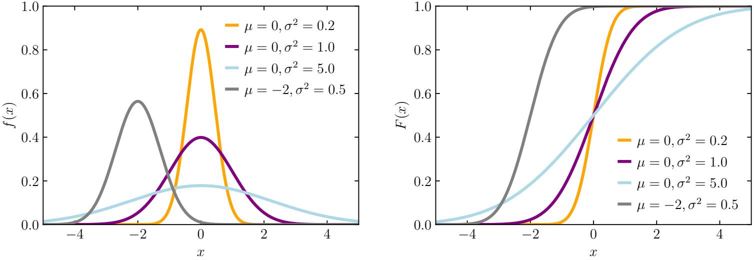




- 正态 (normal) 分布，也叫高斯分布，是统计中**最重要**的一个分布.

- 记 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，其中 $\sigma > 0$，如果

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



- $\mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- $\mathcal{N}(0,1)$ 称为标准正态分布.

- $\mathcal{N}(0,1)$ 称为标准正态分布.
- 如果 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则 $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- $\mathcal{N}(0,1)$ 称为标准正态分布.
- 如果 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- 如果 $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则 $\mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- $\mathcal{N}(0,1)$ 称为标准正态分布.
- 如果 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- 如果 $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则 $\mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- 正态分布的重要性来自于**中心极限定理**!

- $\mathcal{N}(0,1)$ 称为标准正态分布.
- 如果 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- 如果 $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则 $\mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- 正态分布的重要性来自于**中心极限定理**!
- 假设 $X_1, \ldots, X_n \sim$ 任意一个分布, 且它们相互独立. 记

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

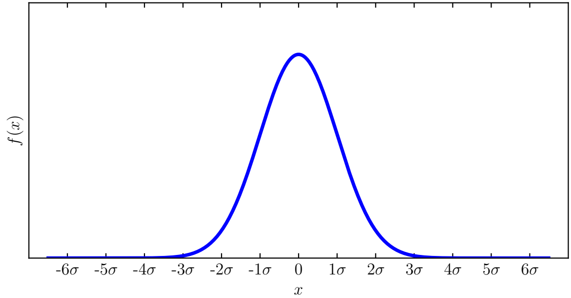
- $\mathcal{N}(0,1)$ 称为标准正态分布.
- 如果 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则 $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- 如果 $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则 $\mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
- 正态分布的重要性来自于**中心极限定理**!
- 假设 $X_1,\ldots,X_n \sim$ 任意一个分布, 且它们相互独立. 记

$$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

那么中心极限定理告诉我们, 当 n 很大时,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} \mathcal{N}(0,1), \quad \bar{X} \overset{\text{近似}}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2/n).$$

- 正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 下的 6σ



在 $\pm1\sigma$ 之间	68.27%	317300 PPM (parts per million) 落在外面
在 $\pm2\sigma$ 之间	95.45%	45500 PPM
在 $\pm3\sigma$ 之间	99.73%	2700 PPM
在 $\pm4\sigma$ 之间	99.9937%	63 PPM
在 $\pm5\sigma$ 之间	99.999943%	0.57 PPM
在 $\pm6\sigma$ 之间	99.9999998%	0.002 PPM

- 六西格玛 (σ) DPMO（defects per million opportunity）

西格玛水平	DPMO	废品率	合格率
1	691,462	69.77%	30.23%
2	308,538	30.88%	69.12%
3	66,807	6.68%	93.32%
4	6,210	0.62%	99.38%
5	233	0.023%	99.977%
6	3.4	0.00034%	99.99966%

- 六西格玛 (σ) DPMO（defects per million opportunity）

西格玛水平	DPMO	废品率	合格率
1	691,462	69.77%	30.23%
2	308,538	30.88%	69.12%
3	66,807	6.68%	93.32%
4	6,210	0.62%	99.38%
5	233	0.023%	99.977%
6	3.4	0.00034%	99.99966%

- 3.4 DPMO vs 0.002 PPM?

- 六西格玛 (σ) DPMO（defects per million opportunity）

西格玛水平	DPMO	废品率	合格率
1	691,462	69.77%	30.23%
2	308,538	30.88%	69.12%
3	66,807	6.68%	93.32%
4	6,210	0.62%	99.38%
5	233	0.023%	99.977%
6	3.4	0.00034%	99.99966%

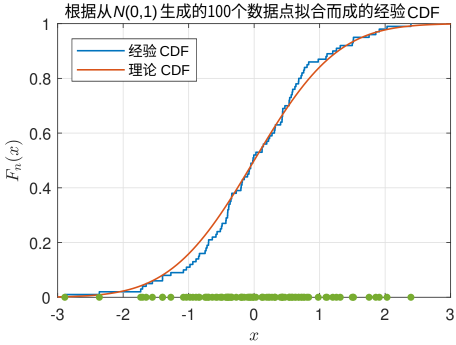
- 3.4 DPMO vs 0.002 PPM? (Reason: 1.5 σ shift.)

- 经验分布 (empirical distribution), 常用于当理论分布均不适用的时候; 它的 CDF 为

$$F(x) = \frac{n \text{ 个点中小于或等于 } x \text{ 的点的数量}}{n}.$$

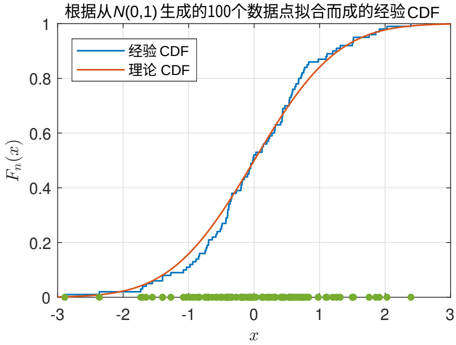
- 经验分布 (empirical distribution)，常用于当理论分布均不适用的时候；它的 CDF 为

$$F(x) = \frac{n \text{ 个点中小于或等于 } x \text{ 的点的数量}}{n}.$$



- 经验分布 (empirical distribution)，常用于当理论分布均不适用的时候；它的 CDF 为

$$F(x) = \frac{n \text{ 个点中小于或等于 } x \text{ 的点的数量}}{n}.$$



- 经验分布是离散的，它的 CDF 是一个阶梯状的函数.

1. 离散与连续随机变量
   - 基础定义
   - 期望和方差
   - 随机样本
   - 点估计和区间估计
2. 常用的分布
   - 泊松分布
   - 三角分布
   - 指数分布
   - 正态分布
   - 经验分布
3. 一般随机数的生成
   - 逆变换法
   - 接受–拒绝法
   - Box–Muller 法

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

一般随机数的生成

- 假设我们已经有了优良的 uniform$(0,1)$ 随机数发生器, 即, 我们可以有一个序列的 uniform$(0,1)$ 随机数.

一般随机数的生成

- 假设我们已经有了优良的 $\text{uniform}(0,1)$ 随机数发生器, 即, 我们可以有一个序列的 $\text{uniform}(0,1)$ 随机数.
- 如何生成一个给定的一般的分布 (如, 泊松、三角、指数、正态等) 下的随机数?

一般随机数的生成

- 假设我们已经有了优良的 $\text{uniform}(0,1)$ 随机数发生器, 即, 我们可以有一个序列的 $\text{uniform}(0,1)$ 随机数.
- 如何生成一个给定的一般的分布 (如, 泊松、三角、指数、正态等) 下的随机数?
- 常用的技术
  - 逆变换法 (一种通用的方法)
  - 接受–拒绝法 (一种通用的方法)
  - 其他为某些分布专门设计的方法 (如, 用 Box–Muller 法生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数)

- 逆变换法 (Inverse-Transform Technique)

- 逆变换法 (Inverse-Transform Technique)

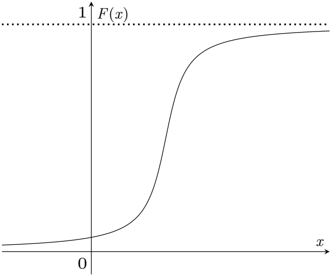


图: 连续随机变量

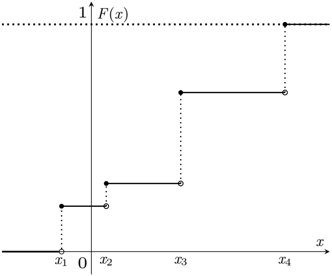


图: 离散随机变量

- 逆变换法 (Inverse-Transform Technique)

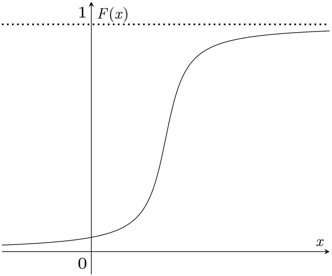


图: 连续随机变量

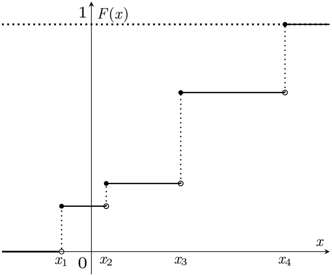


图: 离散随机变量

- 步骤

- 逆变换法 (Inverse-Transform Technique)

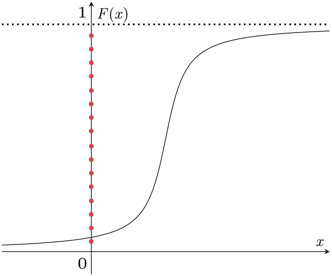


图: 连续随机变量

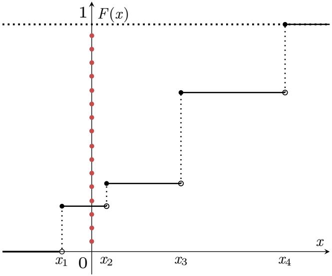


图: 离散随机变量

- 步骤
  1. 生成所需数量的 uniform$(0,1)$ 随机数 (于纵坐标).

- 逆变换法 (Inverse-Transform Technique)

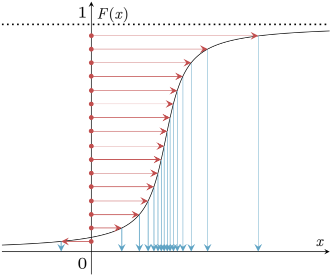


图: 连续随机变量

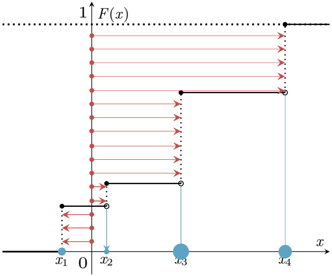


图: 离散随机变量

- 步骤
  1. 生成所需数量的 uniform$(0,1)$ 随机数 (于纵坐标).
  2. 反向映射至横坐标, 所得的点即为采样自 $F(x)$ 的随机数.

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数可以被**解析地求解**或者容**易地计算**时, 逆变换法是一种很有用的方法.

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数可以被**解析地求解**或者**容易地计算**时, 逆变换法是一种很有用的方法.
- 它可被用于从许多连续分布中生成随机数, 如
  - 均匀 (uniform) 分布
  - 指数 (exponential) 分布
  - 三角 (triangular) 分布
  - 威布尔 (Weibull) 分布
  - 柯西 (Cauchy) 分布
  - 帕累托 (Pareto) 分布

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数可以被**解析地求解**或者**容易地计算**时, 逆变换法是一种很有用的方法.

- 它可被用于从许多连续分布中生成随机数, 如
  - 均匀 (uniform) 分布
  - 指数 (exponential) 分布
  - 三角 (triangular) 分布
  - 威布尔 (Weibull) 分布
  - 柯西 (Cauchy) 分布
  - 帕累托 (Pareto) 分布

- 从原则上说, 它可被用于从任意的离散分布中生成随机数, 如
  - 离散均匀 (discrete uniform) 分布
  - 泊松 (Poisson) 分布
  - 经验 (empirical) 分布

- 简单例子: 假设离散随机变量 X 具有如下的 pmf 和 CDF:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 0, \\ 0.3, & x = 1, \\ 0.2, & x = 2, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \le x < 1, \\ 0.8, & 1 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x. \end{cases}$$

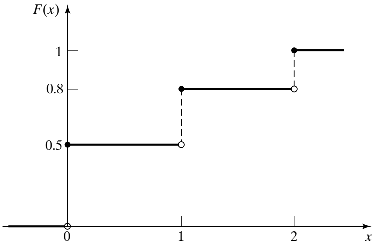
如何生成满足该分布的随机数?

- 简单例子: 假设离散随机变量 X 具有如下的 pmf 和 CDF:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 0, \\ 0.3, & x = 1, \\ 0.2, & x = 2, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \le x < 1, \\ 0.8, & 1 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x. \end{cases}$$

如何生成满足该分布的随机数?

- 求解 $F(x)$ 的反函数, $F^{-1}(y)$: (注: $F^{-1}(y) := \min\{x : F(x) \ge y\}$.)

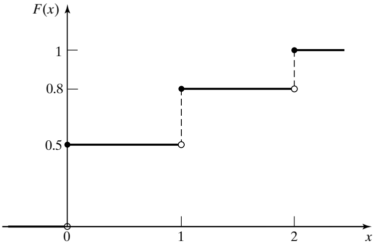


- 简单例子: 假设离散随机变量 X 具有如下的 pmf 和 CDF:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 0, \\ 0.3, & x = 1, \\ 0.2, & x = 2, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \le x < 1, \\ 0.8, & 1 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x. \end{cases}$$

如何生成满足该分布的随机数?

- 求解 $F(x)$ 的反函数, $F^{-1}(y)$: (注: $F^{-1}(y) := \min\{x : F(x) \ge y\}$.)



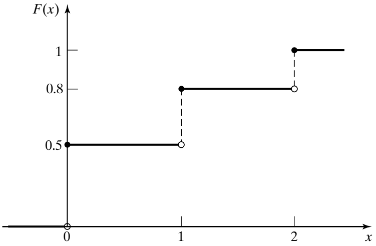
$$F^{-1}(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y \le 0.5, \\ 1, & 0.5 < y \le 0.8, \\ 2, & 0.8 < y < 1. \end{cases}$$

- 简单例子: 假设离散随机变量 X 具有如下的 pmf 和 CDF:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 0, \\ 0.3, & x = 1, \\ 0.2, & x = 2, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \le x < 1, \\ 0.8, & 1 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x. \end{cases}$$

如何生成满足该分布的随机数?

- 求解 $F(x)$ 的反函数, $F^{-1}(y)$: (注: $F^{-1}(y) := \min\{x : F(x) \ge y\}$.)



$$F^{-1}(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y \le 0.5, \\ 1, & 0.5 < y \le 0.8, \\ 2, & 0.8 < y < 1. \end{cases}$$

与最开始的直觉一致!

- 简单例子: 生成 $\mathrm{uniform}(a, b)$ 随机数.

- 简单例子: 生成 $\text{uniform}(a, b)$ 随机数.
- 直觉: 先生成 $\text{uniform}(0, 1)$ 随机数 u, 然后输出 $x = a + (b - a)u$, 即为所需随机数.

- 简单例子: 生成 $\text{uniform}(a, b)$ 随机数.
- 直觉: 先生成 $\text{uniform}(0, 1)$ 随机数 u, 然后输出 $x = a + (b - a)u$, 即为所需随机数.
- 已知 $\text{uniform}(a, b)$ 随机变量的 pdf 和 CDF 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

- 简单例子: 生成 uniform(a, b) 随机数.
- 直觉: 先生成 uniform$(0, 1)$ 随机数 u, 然后输出 $x = a + (b - a)u$, 即为所需随机数.
- 已知 uniform(a, b) 随机变量的 pdf 和 CDF 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

- 求解 $F(x)$ 的反函数:

$$F^{-1}(y) = a + (b - a)y, \quad 0 < y < 1.$$

- 简单例子: 生成 $\mathrm{uniform}(a,b)$ 随机数.
- 直觉: 先生成 $\mathrm{uniform}(0,1)$ 随机数 u, 然后输出 $x = a + (b-a)u$, 即为所需随机数.
- 已知 $\mathrm{uniform}(a,b)$ 随机变量的 pdf 和 CDF 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

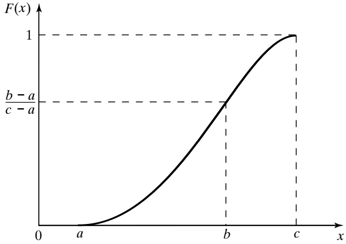
- 求解 $F(x)$ 的反函数:

$$F^{-1}(y) = a + (b-a)y, \quad 0 < y < 1.$$

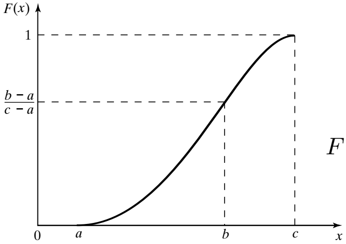
- 与最开始的直觉一致!

- 例子: 生成 $\text{triangular}(a, b, c)$ 随机数.

- 例子: 生成 $\mathrm{triangular}(a, b, c)$ 随机数.
- 已知 $\mathrm{triangular}(a, b, c)$ 随机变量的 CDF 图像如下图所示

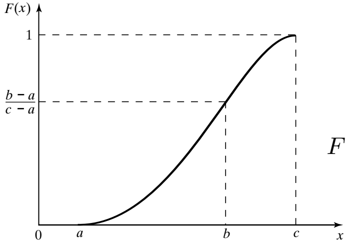


- 例子: 生成 triangular(a, b, c) 随机数.
- 已知 triangular(a, b, c) 随机变量的 CDF 图像如下图所示



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & a \le x < b, \\ 1 - \dfrac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)}, & b \le x < c, \\ 1, & c \le x. \end{cases}$$

- 例子: 生成 triangular(a, b, c) 随机数.
- 已知 triangular(a, b, c) 随机变量的 CDF 图像如下图所示

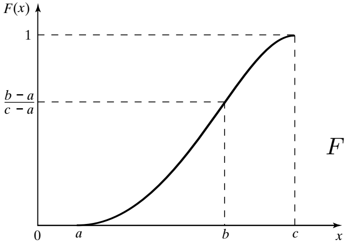


$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & a \le x < b, \\ 1 - \dfrac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)}, & b \le x < c, \\ 1, & c \le x. \end{cases}$$

- 求解 $F(x)$ 的反函数:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} a + \sqrt{(b-a)(c-a)}\sqrt{y}, & 0 < y < \frac{b-a}{c-a}, \\ c - \sqrt{(c-b)(c-a)}\sqrt{1-y}, & \frac{b-a}{c-a} \le y < 1. \end{cases}$$

- 例子: 生成 triangular(a, b, c) 随机数.
- 已知 triangular(a, b, c) 随机变量的 CDF 图像如下图所示



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & a \le x < b, \\ 1 - \dfrac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)}, & b \le x < c, \\ 1, & c \le x. \end{cases}$$

- 求解 $F(x)$ 的反函数:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} a + \sqrt{(b-a)(c-a)}\sqrt{y}, & 0 < y < \frac{b-a}{c-a}, \\ c - \sqrt{(c-b)(c-a)}\sqrt{1-y}, & \frac{b-a}{c-a} \le y < 1. \end{cases}$$

- 在 Excel 中实施.

- 例子: 生成 exponential(λ) 随机数.

- 例子: 生成 exponential(λ) 随机数.
- 已知 exponential(λ) 随机变量的 pdf 和 CDF 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- 例子: 生成 exponential(λ) 随机数.
- 已知 exponential(λ) 随机变量的 pdf 和 CDF 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- 求解 $F(x)$ 的反函数:

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y), \quad 0 < y < 1.$$

- 例子: 生成 exponential(λ) 随机数.
- 已知 exponential(λ) 随机变量的 pdf 和 CDF 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- 求解 $F(x)$ 的反函数:

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y), \quad 0 < y < 1.$$

- 注: 若 $U \sim \text{uniform}(0,1) \Longrightarrow 1-U \sim \text{uniform}(0,1)$, 因此就生成随机数而言, 只需计算 $-\frac{1}{\lambda}\ln(y)$ 即可.

- 例子: 生成 exponential(λ) 随机数.
- 已知 exponential(λ) 随机变量的 pdf 和 CDF 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- 求解 $F(x)$ 的反函数:

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), \quad 0 < y < 1.$$

- 注: 若 $U \sim \text{uniform}(0,1) \Longrightarrow 1 - U \sim \text{uniform}(0,1)$, 因此就生成随机数而言, 只需计算 $-\frac{1}{\lambda}\ln(y)$ 即可.
- 在 Excel 中实施.

- 例子: 生成 Poisson(λ) 随机数.

- 例子: 生成 Poisson(λ) 随机数.
- 已知 Poisson(λ) 随机变量的 pmf 和 CDF 如下:

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

- 例子: 生成 $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ 随机数.
- 已知 $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ 随机变量的 pmf 和 CDF 如下:

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

- 尽管 $F(x)$ 的反函数无法写成解析形式, 但由于其离散性, 可以较简单地通过反函数的定义计算:

$$F^{-1}(y) = \min\{x : F(x) \ge y\}, \quad 0 < y < 1.$$

- 例子: 生成 $\text{Poisson}(\lambda)$ 随机数.
- 已知 $\text{Poisson}(\lambda)$ 随机变量的 pmf 和 CDF 如下:

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

- 尽管 $F(x)$ 的反函数无法写成解析形式, 但由于其离散性, 可以较简单地通过反函数的定义计算:

$$F^{-1}(y) = \min\{x : F(x) \ge y\}, \quad 0 < y < 1.$$

- 在 Excel 中, 可以用

```
POISSON.DIST(x,mean,cumulative)
```

分别计算 $p(x)$ (`cumulative` 为 `FALSE`) 和 $F(x)$ (`cumulative` 为 `TRUE`).

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 例子: 生成 Poisson(λ) 随机数.
- 已知 Poisson(λ) 随机变量的 pmf 和 CDF 如下:

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} p(i) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

- 尽管 $F(x)$ 的反函数无法写成解析形式, 但由于其离散性, 可以较简单地通过反函数的定义计算:

$$F^{-1}(y) = \min\{x : F(x) \ge y\}, \quad 0 < y < 1.$$

- 在 Excel 中, 可以用

```
POISSON.DIST(x,mean,cumulative)
```

分别计算 $p(x)$ (`cumulative` 为 `FALSE`) 和 $F(x)$ (`cumulative` 为 `TRUE`).

- 经验分布随机数也可这样生成, 此时 $F(x)$ 是根据数据得出.

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数无解析形式，且数值计算比较复杂时，逆变换法的效率便会下降.

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数无解析形式，且数值计算比较复杂时，逆变换法的效率便会下降.
- 例如，生成 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 随机数. 已知 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 以及 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，且 $F(x)$ 的反函数无解析形式，只能通过复杂的数值计算得到 $F^{-1}(y)$.

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数无解析形式，且数值计算比较复杂时，逆变换法的效率便会下降.
- 例如，生成 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 随机数. 已知 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 以及 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，且 $F(x)$ 的反函数无解析形式，只能通过复杂的数值计算得到 $F^{-1}(y)$.
  - 在 Excel 中，可以用

    ```
    NORM.DIST(x,mean,standard_dev,cumulative)
    ```

    分别计算 $f(x)$ (`cumulative` 为 `FALSE`) 和 $F(x)$ (`cumulative` 为 `TRUE`).

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数无解析形式，且数值计算比较复杂时，逆变换法的效率便会下降.
- 例如，生成 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 随机数. 已知 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 以及 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，且 $F(x)$ 的反函数无解析形式，只能通过复杂的数值计算得到 $F^{-1}(y)$.
    - 在 Excel 中，可以用

      `NORM.DIST(x,mean,standard_dev,cumulative)`

      分别计算 $f(x)$ (`cumulative` 为 `FALSE`) 和 $F(x)$ (`cumulative` 为 `TRUE`).
    - 在 Excel 中，还可以用

      `NORM.INV(probability,mean,standard_dev)`

      计算 $F^{-1}(y)$.

- 当一个随机变量或分布的 CDF 函数的反函数无解析形式，且数值计算比较复杂时，逆变换法的效率便会下降.
- 例如，生成 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 随机数. 已知 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 以及 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，且 $F(x)$ 的反函数无解析形式，只能通过复杂的数值计算得到 $F^{-1}(y)$.
  - 在 Excel 中，可以用

    `NORM.DIST(x,mean,standard_dev,cumulative)`

    分别计算 $f(x)$ (`cumulative` 为 `FALSE`) 和 $F(x)$ (`cumulative` 为 `TRUE`).
  - 在 Excel 中，还可以用

    `NORM.INV(probability,mean,standard_dev)`

    计算 $F^{-1}(y)$.
- 除了逆变换法之外，还有其他的随机数生成的方法可以考虑，如，接受–拒绝法 (Acceptance-Rejection Technique).

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 只在 $x \in [a, b]$ 时为正值，且 $f(x) \leq M$.

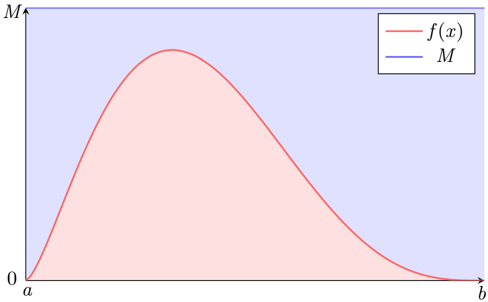


图: 有界的定义域 (*original image from* ZHANG Xiaowei)

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 只在 $x \in [a, b]$ 时为正值，且 $f(x) \leq M$.

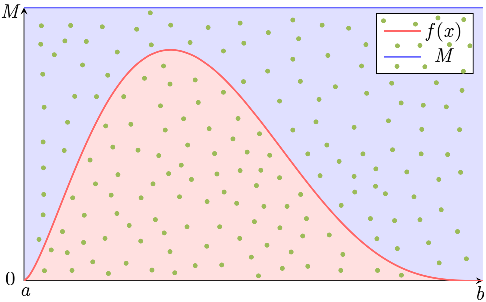


图: 有界的定义域 (*original image from* ZHANG Xiaowei)

1. 生成 uniform$\{(y, z) : a \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq M\}$ 随机数对 $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \ldots$.

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 只在 $x \in [a, b]$ 时为正值，且 $f(x) \le M$.

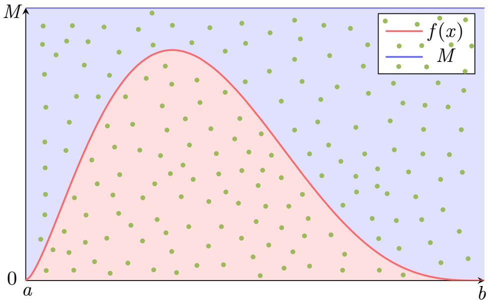


图: 有界的定义域 (*original image from ZHANG Xiaowei*)

1. 生成 $\text{uniform}\{(y, z) : a \le y \le b,\ 0 \le z \le M\}$ 随机数对 $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \ldots$.
   - y_i 来自 $\text{uniform}(a, b)$, z_i 来自 $\text{uniform}(0, M)$.

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 只在 $x \in [a, b]$ 时为正值，且 $f(x) \leq M$.

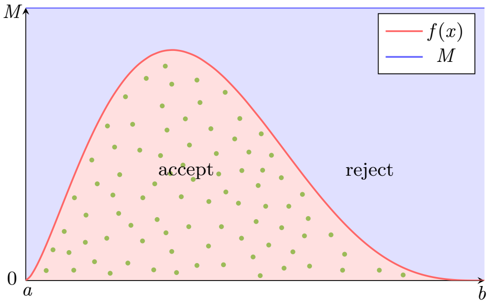
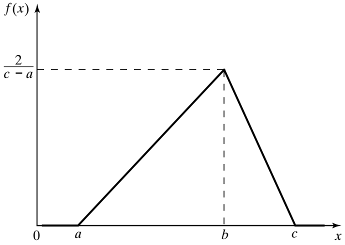


图: 有界的定义域 (*original image from* ZHANG Xiaowei)

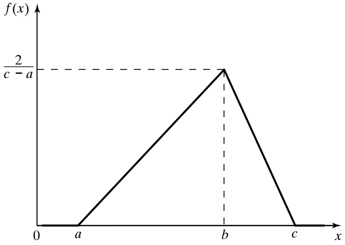
1. 生成 $\text{uniform}\{(y, z) : a \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq M\}$ 随机数对 $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \ldots$.
   - y_i 来自 $\text{uniform}(a, b)$, z_i 来自 $\text{uniform}(0, M)$.
2. 如果 $z_i < f(y_i)$, 接受这个随机数对，并且输出 y_i.

- 例子: 生成 $\text{triangular}(a, b, c)$ 随机数.

- 例子: 生成 $\text{triangular}(a, b, c)$ 随机数.
- 已知 $\text{triangular}(a, b, c)$ 随机变量的 pdf 图像如下图所示

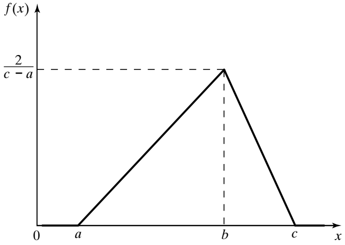


- 例子: 生成 $\text{triangular}(a, b, c)$ 随机数.
- 已知 $\text{triangular}(a, b, c)$ 随机变量的 pdf 图像如下图所示



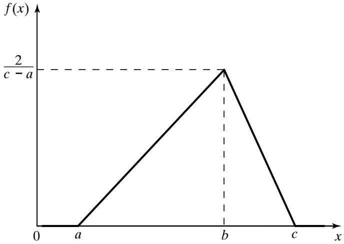
1. 生成随机数对 (y, z), 其中 y 来自 $\text{uniform}(a, c)$, z 来自 $\text{uniform}(0, 2/(c-a))$.

- 例子: 生成 $\mathrm{triangular}(a, b, c)$ 随机数.
- 已知 $\mathrm{triangular}(a, b, c)$ 随机变量的 pdf 图像如下图所示



1. 生成随机数对 (y, z), 其中 y 来自 $\mathrm{uniform}(a, c)$, z 来自 $\mathrm{uniform}(0, 2/(c-a))$.
2. 如果 $z < f(y)$, 接受这个随机数对, 并且输出 y; 否则回到第 1 步.

- 例子: 生成 triangular(a, b, c) 随机数.
- 已知 triangular(a, b, c) 随机变量的 pdf 图像如下图所示



1. 生成随机数对 (y, z), 其中 y 来自 uniform(a, c), z 来自 uniform$(0, 2/(c-a))$.
2. 如果 $z < f(y)$, 接受这个随机数对, 并且输出 y; 否则回到第 1 步.

- 注意: 为了生成 1 个 triangular(a, b, c) 随机数, 需要生成多个其他分布的随机数!

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 具有上界 $Mg(x)$，其中 $g(x)$ 是另一个概率密度函数.

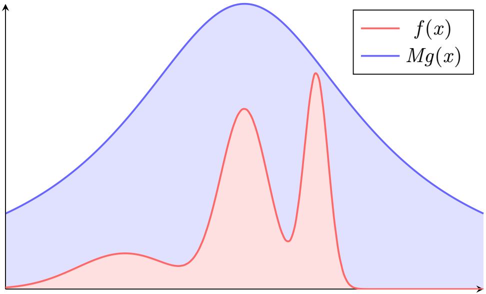


图: 无界的定义域 (*original image from ZHANG Xiaowei*)

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 具有上界 $Mg(x)$，其中 $g(x)$ 是另一个概率密度函数.

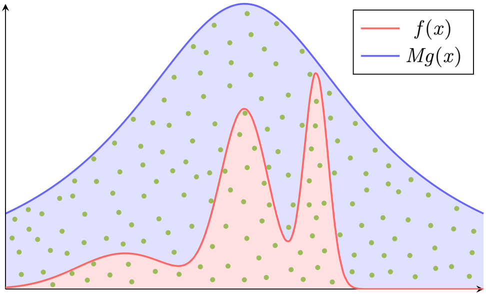


图: 无界的定义域 (*original image from ZHANG Xiaowei*)

1. 生成 $\text{uniform}\{(y,z) : y \in g(\cdot)$ 定义域，$0 \le z \le Mg(y)\}$ 随机数对 $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \ldots$.

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 具有上界 $Mg(x)$，其中 $g(x)$ 是另一个概率密度函数.

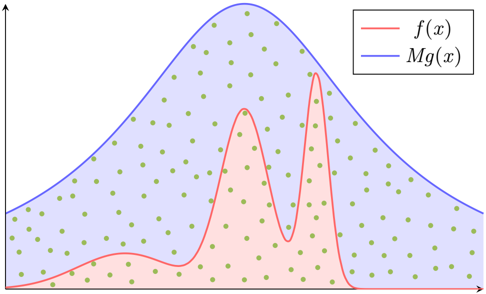
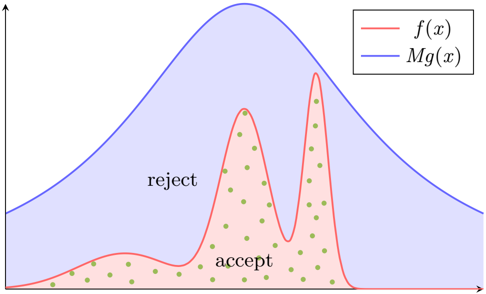


图: 无界的定义域 (*original image from* *ZHANG Xiaowei*)

1. 生成 $\text{uniform}\{(y,z): y\in g(\cdot)$ 定义域, $0\le z\le Mg(y)\}$ 随机数对 $(y_1,z_1),(y_2,z_2),\ldots$.
   - y_i 来自 $Y\sim g(\cdot)$, z_i 来自 $Z\sim\text{uniform}(0,Mg(y_i))$. **(why?)**

- 若我们想产生某个分布下的随机数，已知它的概率密度函数 $f(x)$ 具有上界 $Mg(x)$，其中 $g(x)$ 是另一个概率密度函数.



图：无界的定义域 (*original image from* ZHANG Xiaowei)

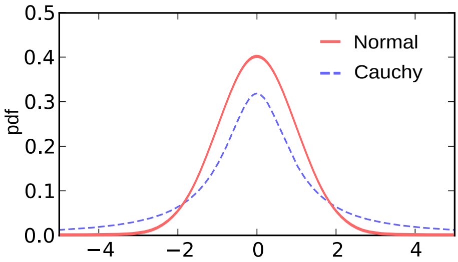
1. 生成 $\mathrm{uniform}\{(y,z): y \in g(\cdot)$ 定义域，$0 \le z \le Mg(y)\}$ 随机数对 $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \ldots$.
   - y_i 来自 $Y \sim g(\cdot)$，z_i 来自 $Z \sim \mathrm{uniform}(0, Mg(y_i))$. **(why?)**
2. 如果 $z_i < f(y_i)$，接受这个随机数对，并且输出 y_i.

- 例子: 生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.

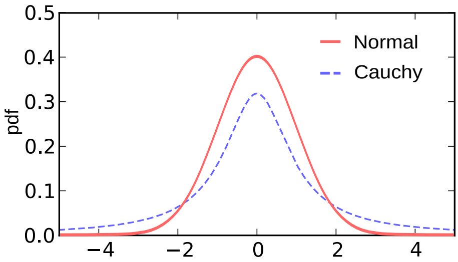
- 例子: 生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
  - 不难发现, 若 x 为 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数, 则 $\mu+\sigma x$ 为 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 随机数.

- 例子: 生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
    - 不难发现, 若 x 为 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数, 则 $\mu+\sigma x$ 为 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 随机数.
- 采用 Cauchy(0) 的概率密度函数作为辅助, 该函数形式为 $g(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

- 例子: 生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
  - 不难发现, 若 x 为 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数, 则 $\mu+\sigma x$ 为 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 随机数.
- 采用 Cauchy(0) 的概率密度函数作为辅助, 该函数形式为 $g(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x\in(-\infty,\infty)$.



- 例子: 生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
  - 不难发现, 若 x 为 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数, 则 $\mu+\sigma x$ 为 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 随机数.
- 采用 Cauchy(0) 的概率密度函数作为辅助, 该函数形式为 $g(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x\in(-\infty,\infty)$.



- 需要使 $M \geq \sqrt{\frac{2\pi}{e}}$ 才可以.

- 使用 Box–Muller 法生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.

- 使用 Box–Muller 法生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
  1. 生成独立 $\mathrm{uniform}(0,1)$ 随机数 u_1 和 u_2.

- 使用 Box–Muller 法生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
  1. 生成独立 uniform$(0,1)$ 随机数 u_1 和 u_2.
  2. 令 $z_1 = \sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2)$ 及 $z_2 = \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2)$.

- 使用 Box–Muller 法生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
  1. 生成独立 $\text{uniform}(0,1)$ 随机数 u_1 和 u_2.
  2. 令 $z_1 = \sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2)$ 及 $z_2 = \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2)$.
- 可以证明, z_1 和 z_2 都是 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数, 且它们相互独立.

- 使用 Box–Muller 法生成 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数.
  1. 生成独立 uniform(0, 1) 随机数 u_1 和 u_2.
  2. 令 $z_1 = \sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2)$ 及 $z_2 = \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2)$.
- 可以证明, z_1 和 z_2 都是 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机数, 且它们相互独立.

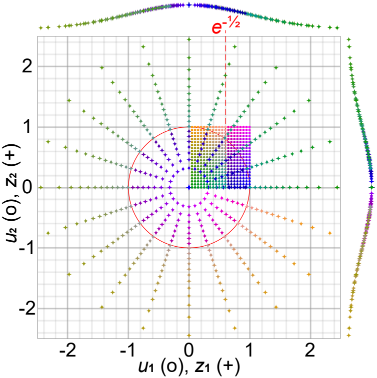


图: Box–Muller 法的可视化 (image by Cmglee / CC BY 3.0) 可交互图像